Valeur absolue : un nombre... sans son signe ?

Version du 9 décembre 2016

http://loglang.crem.be/***

Notions préliminaires

NOMBRE : concept mathématique abstrait associé à celui de quantité.

Nombre : toute écriture désignant un NOMBRE.

Nombre arithmétique : suite finie non vide de chiffres, ne commençant pas par 0.

NB : Tout nombre arithmétique est donc un nombre.

La valeur absolue d'un NOMBRE fait partie de ces notions transversales qui accompagnent les élèves du début du secondaire jusque dans l'enseignement supérieur, des fondements de l'algèbre jusqu'aux tréfonds de l'analyse. Au fur et à mesure de l'évolution de l'âge des apprenants, on leur en fournit une définition que l'on veut de plus en plus rigoureuse.

Cet article pose la question de l'exactitude d'une définition parfois données aux élèves de première année du secondaire. Il remet aussi en question l'utilisation de la valeur absolue auprès d'élèves si jeunes, et propose des pistes allant en ce sens.

1 Valeur absolue d'un NOMBRE

Il est possible de définir la valeur absolue d'un NOMBRE de plusieurs manières. Cette notion apparaît pour la première fois au moment de l'introduction des NOMBRES entiers, au début du secondaire, à un moment où il paraît tout à fait prématuré de la définir comme suit :

Définition 1

$$\forall a \in \mathbb{R} : |a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Cette définition nécessite en effet une certaine habitude de travail avec les expressions littérales, une maîtrise de l'utilisation du **signe moins de symétrie [lien]**, et la connaissance d'au moins une « règle des signes », à savoir que l'opposé d'un NOMBRE négatif donne un NOMBRE positif (jusqu'ici, des connaissances et un savoir-faire que l'on acquiert en apprenant à opérer dans $\mathbb{Z}$)... On lui préfère donc d'autres définitions plus simples dans un premier temps.

La suivante, comparable à certaines proposées [2], est-elle acceptable ?

Définition 2
La valeur absolue d'un nombre est ce nombre, sans son signe.

Ou plutôt, posons-nous la question de son acceptabilité au départ d'une version tenant compte des notions préliminaires :

Définition 3
La valeur absolue d'un NOMBRE est le NOMBRE qui s'écrit comme le premier, sans signe.

Une des réticences que l'on pourrait formuler à propos de cette définition dépend du sens accordé au mot *signe*.

2 Sens du mot *signe*

2.1 Signe d'un nombre

L'écriture de nombres ne se fait pas exclusivement à l'aide de chiffres. Interviennent aussi d'autres symboles, tels le + (plus) et le − (moins) lorsqu'on en vient à évoquer les NOMBRES positifs et les NOMBRES négatifs.

Prenons pour point de départ :
- Un **NOMBRE positif** est un NOMBRE supérieur ou égal à zéro.
- Un **NOMBRE négatif** est un NOMBRE inférieur ou égal à zéro.

Signe
Ce qu'on appelle le **signe** d'un nombre n'est pas la propriété du NOMBRE d'être positif ou négatif, mais bien uniquement le symbole + ou − qui exprime cette propriété, lorsqu'il précède un nombre arithmétique [2].

Ainsi, on dit parfois d'un NOMBRE qu'il est « de signe + (plus) » voulant dire qu'il peut s'écrire avec un nombre arithmétique précédé du signe plus, car le NOMBRE est positif. Et on dira d'un autre qu'il est « de signe − (moins) » s'il peut s'écrire à l'aide d'un nombre arithmétique précédé du signe moins, le NOMBRE étant négatif [1].

On remarque qu'en mathématiques, il y a polysémie du mot *signe*, qui peut désigner tantôt un symbole, quel qu'il soit, tantôt le symbole spécifique qui, lorsqu'il précède un nombre arithmétique, indique si le d'un NOMBRE désigné est positif ou négatif.

Il n'y a pas de *signe positif* ni de *signe négatif*. Un signe en lui-même n'est pas supérieur ou inférieur à zéro.

2.2 Signe d'une expression algébrique ou d'une fonction

La question du signe se pose aussi pour les expressions algébriques et les fonctions (de même que la valeur absolue).

À l'âge où ces questions se posent, l'apprenant a en principe suffisamment d'acquis pour aborder la définition 1. En ce qui concerne le signe des expressions algébriques et fonctions, il se détermine en dressant un tableau de signes. Les symboles + et − qu'on y trouve sont ceux du résultat des opérations effectuées pour des valeurs numériques accordées à la variable, correspondant à la zone concernée du tableau.

Exemple
Voici le tableau de signes de la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto y = x^2 - 1$:

x		-1		1	
$x^2 - 1$	$+$	0	$-$	0	$+$

Dire par exemple que la fonction f est *négative* entre -1 et 1 est aussi un abus de langage. Une fonction en elle-même ne peut être ni positive, ni négative, de même qu'une expression algébrique. On devrait en toute rigueur parler d'images négatives par la fonction, et demander aux élèves, dans les consignes d'exercices, *le signe des images de la fonction* plutôt que *le signe de la fonction*, et le *signe des valeurs numériques* d'une expression algébrique.

Pour des élèves manipulant régulièrement expressions algébriques et fonctions, on peut s'attendre à voir le même abus être utilisé lorsqu'on reparlera du signe des nombres.

3 Conséquences pour la valeur absolue

Un premier obstacle à l'acceptation de la définition 3 est donc levé : si le signe d'un nombre est défini comme le signe + ou − précédant un nombre arithmétique, alors il est exact qu'écrire -2 sans le moins revient à écrire 2, représentant un NOMBRE qui correspond à la valeur absolue de -2. De même qu'écrire $+3$ sans le plus revient à écrire 3, qui correspond à sa valeur absolue. Quant aux d'un NOMBRES positifs représentés par un nombre sans signe plus, nul besoin de l'ôter, on a directement l'écriture de leur valeur absolue. Notre seconde définition n'est réfutable que si l'on commet l'erreur de considérer le signe comme la propriété du NOMBRE d'être positif ou négatif.

Reste néanmoins un second obstacle qu'il nous faut surmonter : le cas des valeurs absolues d'expressions algébriques. Que devient, d'après la définition 3, la valeur absolue de $-a$?

> Soit $-a$ un nombre désignant un NOMBRE positif.
> Son écriture sans signe ne donne-t-elle pas a, désignant un NOMBRE négatif, rendant la dernière définition fausse ?

Ce raisonnement, qui pousse à mettre notre définition 3 de côté, comporte une erreur : le *moins* de $-a$ n'est pas son signe, mais ce que nous appelons un **moins de symétrie[lien]**. L'expression $-a$ désigne « l'opposé de a », et pas le NOMBRE « négatif a ». Lui ôter le moins ne correspond donc pas à ce que prescrit la définition, qui n'est donc pas inexacte. Simplement, son champ d'action est limité, car elle ne permet pas de statuer directement sur la valeur absolue de NOMBRES représentés par des expressions algébriques ou des résultats d'opérations comme $(-4+5)$, (-2×3)... Les nombres $(-4+5)$, a... n'étant pas des nombres arithmétiques.

4 Difficultés persistantes et pistes didactiques

Bien que la définition 3 soit exacte, son utilisation chez les plus jeunes n'est pas sans risque pour l'avenir. On constate en effet chez certains apprenants du secondaire supérieur une association systématique et erronée de *valeur absolue* à un enlèvement du signe moins. Rappelons que pendant très longtemps, seule la valeur absolue de NOMBRES s'écrivant sous la forme d'un signe précédant un nombre arithmétique a été déterminée… Même pour un élève apte à identifier **les différents types de signe moins**, l'entrée en jeu d'expressions algébriques ou arithmétiques plus complexes bouscule des habitudes que les opérations sur les entiers ont martelées.

L'utilisation de la valeur absolue en début du secondaire pose donc problème. Son emploi est nécessaire aux opérations dans $\mathbb{Z}$ (pour expliquer la procédure donnant le produit de deux entiers, par exemple), mais les prérequis de la rigoureuse définition 1 nous poussent à en utiliser des plus simples, au champ limité, et qui n'empêchent pas l'installation de mauvaises habitudes.

L'idée de parler de valeur absolue aux plus jeunes nous convainc assez peu. Certains manuels lui préfèrent la notion de **distance à zéro** [3].

Définition 3
On appelle **distance à zéro** d'un NOMBRE la distance qui sépare ce NOMBRE de l'origine, sur la droite graduée.

La valeur absolue n'apparaît que plus tard, quand les élèves sont aptes à comprendre la définition 1.

Présenter les choses de cette manière comporte plusieurs avantages. Le premier est l'établissement d'un lien entre algèbre et géométrie, de par sa définition (distance) et sa notation assimilable à celle de la longueur d'un segment et de l'amplitude d'un angle. Son champ d'application est aussi beaucoup plus explicite, puisqu'elle ne s'applique qu'aux nombres dont on peut visualiser la distance à zéro (il est même un peu plus vaste que celui de la définition 3, car également applicable à des nombres tels que $\sqrt{2}$, $\frac{1}{2}$…) L'explicitation des règles d'opérations sur les entiers reste réalisable. De plus, cette notion n'entre pas en conflit avec la définition 1, et devrait prévenir des abus d'omission du moins précédant certaines expressions algébriques.

Nous pensons par conséquent qu'en plus d'expliciter les distinctions entre NOMBRE (concept) et nombre (représentation), signe + et positif, et signe − et négatif, la *distance à zéro* mérite d'être privilégiée. ■ **Samuël Di Emidio**, CREM

Références

[1] Alain Bouvier, Michel George, and François Le Lionnais. *Dictionnaire des mathématiques*. Presses Universitaires de France, 4e edition, 1993.

[2] V. Herbiet. *Traité d'Algèbre Élémentaire*. AD. Wesmael-Charlier, Namur, 3e edition, 1935.

[3] Sésamath. Le manuel 5e et ses compléments numériques. 2010. `http://manuel.sesamath.net`.